*А. М. Бирюков*

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева (КНИТУ-КАИ), г. Казань,

Институт компьютерных технологий и защиты информации (ИКТЗИ),

4 курс, гр. 4412

Научный руководитель:

д.т.н., профессор В. И. Заботин

МЕТОД РАВНОМЕРНОГО ПЕРЕБОРА ПОИСКА ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМУМА ε-ЛИПШИЦЕВОЙ НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИИ

АННОТАЦИЯ

В работе предлагается легко реализуемый численный метод приближённого поиска глобального минимума непрерывной на отрезке функции, на которую не накладываются никакие дополнительные условие типа гладкости, выпуклости и тому подобные. Приводятся результаты численных экспериментов. Метод может быть полезен при решении задач математического программирования.

Ключевые слова: ε-Липшицевость, равномерный перебор, минимум функции.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было введено понятие ε-Липшицевости:

Пусть функция определена на компактном множестве из нормированного пространства . Она называется ε-Липшицевой, если выполняется следующее условие:

(1)

Там же было доказано, что выполнение условия (1) необходимо и достаточно для непрерывности функции на . Таким образом, открывается возможность минимизации непрерывных на компакте функций без добавления каких-либо дополнительных условий (кроме непрерывности) на минимизируемую функцию.

Следует заметить, что из определения (1) не следует положительности постоянной , которую будем называть ε-константой Липшица.

Для дальнейших выкладок для нас будет существенной её строгая положительность. В [2] было показано, что неравенство при заданном выполняется, если найдутся такие, что

(2)

Условие (2) было названо согласованностью функции и . Легко понять, что это условие не сильно сужает класс рассматриваемых функций, и мы будем всюду в дальнейшем полагать это условие выполненным.

Свойство ε-Липшицевости вызвало появление ряда работ [3, 4, 5, 6], в каждой из которых приходилось решать вспомогательную задачу минимизации ε-Липшицевой функции. При этом предполагалось, что значение оценки было известно или известна функциональная зависимость от ε. Отыскание указанных зависимостей является непростой отдельно взятой задачей. В данной работе считается, что эта задача решена и нам известна минимальная оценка .

АЛГОРИТМ МИНИМИЗАЦИИ

Здесь мы сформулируем и обоснуем алгоритм минимизации ε-Липшицевой функции на отрезке.

Введём параметры алгоритма:

* ε – параметр, выбираемый из условия (1)
* – погрешность, с которой отыскивается приближённое значение минимума функции

Всюду предполагается выполнение неравенства .

Обозначим:

* - отрезок, на котором отыскивается минимум
* - наименьшее значение функции на отрезке (которое, очевидно, существует)
* Положим , где n-количество отрезков, на которые разбивается отрезок .

Потребуем выполнение неравенства , отсюда . Полученное условие позволяет найти количество пробных точек.

Построим последовательность пробных точек отрезка по следующему правилу:

Нашей задачей будет показать, что или, что то же самое, .

Очевидно, для этого будет достаточно показать, что среди членов последовательности найдётся точка , для которой выполняется условие:

(3)

Обозначим и пусть . Тогда из неравенства (1) следует

или, что то же самое

(4)

Но поскольку , то выполняется следующее неравенство

Тогда из неравенства (4) следует:

(5)

Пусть - точка глобального минимума функции на отрезке . Очевидно, найдётся отрезок такой, что .

Тогда, из неравенства (5) следует:

Что и требовалось доказать.

**Замечание к алгоритму**:

Использование алгоритма предполагает априорное знание ε-константы Липшица для заданного ε.

Как видно из цитируемой литературы - лишь для некоторых элементарных функций удалось построить функциональную зависимость от ε. Последняя зависимость, из известных автору, получена в работе [6] для функции , что, как следует из работы, было сопряжено с трудностями. Однако, если дополнить приведённый алгоритм предварительным нахождением минимальной оценки ε-константы Липшица с помощью алгоритма, предложенного в [2], то указанная трудность снимается (правда ценой увеличения времени нахождения глобального минимума).

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

В качестве тестовой задачи приближённого нахождения глобального минимума функции была рассмотрена функция вида

для которой в [5] была получена оценка

Для двух различных наборов постоянных приведём результаты численного эксперимента.

*Таблица 1.*

Результаты работы алгоритма

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Отрезок | ε\* | ε |  |  |  |  |  |  | , *м*с |  |
| Набор 1. *b*1= *b*2= *b*3= 0; *a*1=–4, *a*2=–1, *a*3= 3 | | | | | | | | | |  |
|  |
|  | 0.01 | 0.005 | 50 | 0.0001 | –0.999999 | | 0.000001 | 99999 | 4 |  |
|  | 0.001 | 250 | 0.000036 | –1.000004 | | 0.002000 | 277777 | 11 |  |
| [–5; 5] |  |
| 0.001 | 0.0005 | 500 | 0.000001 | –3.999999 | | 0.000012 | 9999999 | 398 |  |
|  |  |
|  | 0.0001 | 2500 | 0.0000004 | –1.000000 | | 0.000202 | 27777777 | 1101 |  |
|  | 0.01 | 0.005 | 50 | 0.000100 | 2.999999 | | 0.000003 | 200000 | 9 |  |
|  | 0.001 | 250 | 0.000036 | –1.000000 | | 0.000007 | 555555 | 35 |  |
| [–10; 10] |  |
| 0.001 | 0.0005 | 500 | 0.000001 | 2.999999 | | 0.000026 | 20000000 | 751 |  |
|  |  |
|  | 0.0001 | 2500 | 0.0000004 | –1.000000 | | 0.000081 | 55555555 | 2059 |  |
|  | 0.01 | 0.005 | 50 | 0.000100 | 2.999999 | | 0.000004 | 300000 | 12 |  |
|  | 0.001 | 250 | 0.000036 | 2.999999 | | 0.000009 | 833333 | 32 |  |
| [–15; 15] |  |
| 0.001 | 0.0005 | 500 | 0.000001 | 2.999999 | | 0.000066 | 30000000 | 1148 |  |
|  |  |
|  | 0.0001 | 2500 | 0.0000004 | 2.999999 | | 0.000110 | 83333333 | 3059 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Набор 2. *b*1=–1, *b*2=–1.005, *b*3= 0.5; *a*1=–4, *a*2=–1, *a*3= 3 | | | | | | | | |  |
|  |
|  | 0.01 | 0.005 | 50 | 0.000100 | –0.999999 | –1.004999 | 99999 | 3 |  |
| [–5; 5] | 0.001 | 250 | 0.000036 | –1.000004 | –1.003000 | 277777 | 9 |  |
|  |
| 0.001 | 0.0005 | 500 | 0.000001 | –0.999999 | –1.004982 | 9999999 | 367 |  |
|  |  |
|  | 0.0001 | 2500 | 0.0000004 | –1.000000 | –1.004798 | 27777777 | 997 |  |
|  | 0.01 | 0.005 | 50 | 0.000100 | –1.000000 | –1.004997 | 200000 | 7 |  |
|  | 0.001 | 250 | 0.000036 | –1.000000 | –1.004993 | 555555 | 23 |  |
| [–10; 10] |  |
| 0.001 | 0.0005 | 500 | 0.000001 | –1.000000 | –1.004973 | 20000000 | 711 |  |
|  |  |
|  | 0.0001 | 2500 | 0.0000004 | –1.000000 | –1.004919 | 55555555 | 1971 |  |
|  | 0.01 | 0.005 | 50 | 0.000100 | –1.000000 | –1.004995 | 300000 | 10 |  |
|  | 0.001 | 250 | 0.000036 | –0.999996 | –1.003000 | 833333 | 43 |  |
| [–15; 15] |  |
| 0.001 | 0.0005 | 500 | 0.000001 | –1.000000 | –1.004933 | 30000000 | 1056 |  |
|  |  |
|  | 0.0001 | 2500 | 0.0000004 | –1.000000 | –1.004834 | 83333333 | 2871 |  |

Сравнивая с результатами, полученными в [5], мы видим, что при более простой реализации алгоритма требуется больше пробных точек, однако время, необходимое на выполнение алгоритма, значительно уменьшается.

**Многомерный случай**

Далее рассмотрим случай применения метода равномерного перебора поиска глобального минимума двумерной ε-Липшицевой функции.

Дана функция такая, что . Область, на которой будет производиться изучение функции на минимум, разделим сеткой размера . Введём следующие обозначения:

* ε – параметр, выбираемый из условия (1)
* – погрешность, с которой отыскивается приближённое значение минимума функции
* – шаг алгоритма по оси ;
* – шаг алгоритма по оси ;
* - наименьшее значение функции на области (которое, очевидно, существует);
* - узел сетки, представляющий ячейку , где .

Определим значение . Для этого, сначала необходимо ограничить значение шага , допустим, следующим образом:

Тогда, очевидно

И, преобразовав это неравенство, получаем нижнюю границу шага по оси :

Аналогичным образом получаем оценку числа разбиений по оси :

Строго говоря, константы Липшица по оси и могут различаться, но мы можем взять большую из них и использовать как универсальную

Нашей задачей будет доказать истинность следующего неравенства:

Найдём такой, что

Или, что то же самое

Для раскрытия норме воспользуемся определением понятия Чебышёва

Тогда:

Так как соседние узлы сетки не могут располагаться друг от друга дальше, чем на величину, то

А так как и , и ограничены сверху одной величиной , тогда можно записать

Переписав, получаем требуемое неравенство

Что и требовалось доказать.



Список литературы:

1. Vanderbei, R.J. Extension of Piyavskii’s Algorithm to Continuous Global Optimization / R.J. Vanderbei // Journal of Global Optimization. – 1999. – Vol. 14. – P. 205-216.
2. Заботин, В.И. Алгоритм вычисления минимальной оценки ε-постоянной Липшица непрерывной функции / В.И. Заботин, П.А. Чернышевский // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2018. - № 2, вып. 2. – С. 127-132.
3. Заботин, В.И. Два алгоритма отыскания проекции точки на невыпуклое множество в нормированном пространстве / В.И. Заботин, Н.К. Арутюнова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 3. – С. 344-349.
4. Арутюнова, Н.К. Алгоритмы проектирования точки на поверхность уровня непрерывной на компакте функции / Н.К. Арутюнова, А.М. Дуллиев, В.И. Заботин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 9. – С. 1448-1454.
5. Арутюнова, Н.К. Модификация метода Евтушенко поиска глобального минимума для случая непрерывной на компакте функции / Н.К. Арутюнова // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2013. - № 2, вып. 2. – С. 154-157.
6. N.K. Arutyunova Models and methods for three external ballistics inverse problems / N.K. Arutyunova, A.M. Dulliev, V.I. Zabotin // , Vestnik YuUrGU. – 2017. – Vol. 10. – P. 78-91.