*А. М. Бирюков*

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева (КНИТУ-КАИ), г. Казань,

Институт компьютерных технологий и защиты информации (ИКТЗИ),

4 курс, гр. 4412

Научный руководитель:

д.т.н., профессор В. И. Заботин

МЕТОД РАВНОМЕРНОГО ПЕРЕБОРА ПОИСКА ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМУМА ε-ЛИПШИЦЕВОЙ НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИИ

АННОТАЦИЯ

В работе предлагается легко реализуемые численные методы приближённого поиска глобального минимума непрерывной на отрезке функции и непрерывной на брусе функции двух переменных, на которые не накладываются никакие дополнительные условия типа Липшицевости. Единственным требованием к функции является её непрерывность на выпуклом компакте(отрезке или прямоугольнике). Приводятся результаты численных экспериментов. Методы могут быть полезны при решении задач негладкого математического программирования.

Ключевые слова: ε-Липшицевость, равномерный перебор, минимум функции.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было введено понятие ε-Липшицевости:

Пусть функция определена на компактном множестве из нормированного пространства . Она называется ε-Липшицевой, если выполняется следующее условие:

(1)

Там же было доказано, что выполнение условия (1) необходимо и достаточно для непрерывности функции на . Оказалось, что свойство ε-Липшицевости функции можно с успехом применять к созданию методов оптимизации негладких(может быть существенно негладких) функций. Так, в указанной работе [1], была предложена модификация метода Пиявского (метода ломаных) поиска приближённого минимума ε-Липшицевой функции. Таким образом, открывается возможность минимизации непрерывных на компакте функций без добавления каких-либо дополнительных условий (кроме непрерывности) на минимизируемую функцию.

Следует заметить, что из определения (1) не следует положительности постоянной , которую будем называть ε-константой Липшица.

Для дальнейших выкладок для нас будет существенной её строгая положительность. В [2] было показано, что неравенство при заданном выполняется, если найдутся такие, что

(2)

Условие (2) было названо согласованностью функции и . Легко понять, что это условие не сильно сужает класс рассматриваемых функций, и мы будем всюду в дальнейшем полагать это условие выполненным.

Свойство ε-Липшицевости вызвало появление ряда работ [3, 4, 5, 6], в каждой из которых приходилось решать вспомогательную задачу минимизации ε-Липшицевой функции. При этом предполагалось, что значение оценки было известно или известна функциональная зависимость от ε. Отыскание указанных зависимостей является непростой задачей. Можно сказать, что непростой задачей является уже задача нахождения постоянной Липшица для Липшицевых функций, задача же нахождения постоянной является задачей ещё более сложной. В последнее время появилась работа [2], в которой предложен один из возможных алгоритмов приближённого отыскания постоянной по заданному . В данной работе считается, что эта задача решена и нам известна минимальная оценка .

# Глава 1. Алгоритм равномерного перебора отыскания глобального минимума функции одной переменной непрерывной(ε-Липшицевой) на отрезке

## Описание алгоритма и его обоснование

Здесь мы сформулируем и обоснуем алгоритм минимизации ε-Липшицевой функции на отрезке.

Введём параметры алгоритма:

* ε – параметр, выбираемый из условия (1)
* – погрешность, с которой отыскивается приближённое значение минимума функции

Всюду предполагается выполнение неравенства .

Обозначим:

* - отрезок, на котором отыскивается минимум
* - наименьшее значение функции на отрезке (которое, очевидно, существует)
* Положим , где n-количество отрезков, на которые разбивается отрезок .

Потребуем выполнение неравенства , отсюда . Полученное условие позволяет найти количество пробных точек.

Построим последовательность пробных точек отрезка по следующему правилу:

Нашей задачей будет показать, что или, что то же самое, .

Очевидно, для этого будет достаточно показать, что среди членов последовательности найдётся точка , для которой выполняется условие:

(3)

Обозначим и пусть . Тогда из неравенства (1) следует

или, что то же самое

(4)

Но поскольку , то выполняется следующее неравенство

Тогда из неравенства (4) следует:

(5)

Пусть - точка глобального минимума функции на отрезке . Очевидно, найдётся отрезок такой, что .

Тогда, из неравенства (5) следует:

Что и требовалось доказать.

## Замечание к алгоритму

Использование алгоритма предполагает априорное знание ε-константы Липшица для заданного ε.

Как видно из цитируемой литературы - лишь для некоторых элементарных функций удалось построить функциональную зависимость от ε. Последняя зависимость, из известных автору, получена в работе [6] для функции , что, как следует из работы, было сопряжено с трудностями. Однако, если дополнить приведённый алгоритм предварительным нахождением минимальной оценки ε-константы Липшица с помощью алгоритма, предложенного в [2], то указанная трудность снимается (правда ценой увеличения времени нахождения глобального минимума).

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

В качестве тестовой задачи приближённого нахождения глобального минимума функции была рассмотрена функция вида

для которой в [5] была получена оценка

Для двух различных наборов постоянных приведём результаты численного эксперимента.

*Таблица 1.*

Результаты работы алгоритма

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Отрезок | ε\* | ε |  |  |  |  |  |  | , *м*с |  |
| Набор 1. *b*1= *b*2= *b*3= 0; *a*1=–4, *a*2=–1, *a*3= 3 | | | | | | | | | |  |
|  |
|  | 0.01 | 0.005 | 50 | 0.0001 | –0.999999 | | 0.000001 | 99999 | 4 |  |
|  | 0.001 | 250 | 0.000036 | –1.000004 | | 0.002000 | 277777 | 11 |  |
| [–5; 5] |  |
| 0.001 | 0.0005 | 500 | 0.000001 | –3.999999 | | 0.000012 | 9999999 | 398 |  |
|  |  |
|  | 0.0001 | 2500 | 0.0000004 | –1.000000 | | 0.000202 | 27777777 | 1101 |  |
|  | 0.01 | 0.005 | 50 | 0.000100 | 2.999999 | | 0.000003 | 200000 | 9 |  |
|  | 0.001 | 250 | 0.000036 | –1.000000 | | 0.000007 | 555555 | 35 |  |
| [–10; 10] |  |
| 0.001 | 0.0005 | 500 | 0.000001 | 2.999999 | | 0.000026 | 20000000 | 751 |  |
|  |  |
|  | 0.0001 | 2500 | 0.0000004 | –1.000000 | | 0.000081 | 55555555 | 2059 |  |
|  | 0.01 | 0.005 | 50 | 0.000100 | 2.999999 | | 0.000004 | 300000 | 12 |  |
|  | 0.001 | 250 | 0.000036 | 2.999999 | | 0.000009 | 833333 | 32 |  |
| [–15; 15] |  |
| 0.001 | 0.0005 | 500 | 0.000001 | 2.999999 | | 0.000066 | 30000000 | 1148 |  |
|  |  |
|  | 0.0001 | 2500 | 0.0000004 | 2.999999 | | 0.000110 | 83333333 | 3059 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Набор 2. *b*1=–1, *b*2=–1.005, *b*3= 0.5; *a*1=–4, *a*2=–1, *a*3= 3 | | | | | | | | |  |
|  |
|  | 0.01 | 0.005 | 50 | 0.000100 | –0.999999 | –1.004999 | 99999 | 3 |  |
| [–5; 5] | 0.001 | 250 | 0.000036 | –1.000004 | –1.003000 | 277777 | 9 |  |
|  |
| 0.001 | 0.0005 | 500 | 0.000001 | –0.999999 | –1.004982 | 9999999 | 367 |  |
|  |  |
|  | 0.0001 | 2500 | 0.0000004 | –1.000000 | –1.004798 | 27777777 | 997 |  |
|  | 0.01 | 0.005 | 50 | 0.000100 | –1.000000 | –1.004997 | 200000 | 7 |  |
|  | 0.001 | 250 | 0.000036 | –1.000000 | –1.004993 | 555555 | 23 |  |
| [–10; 10] |  |
| 0.001 | 0.0005 | 500 | 0.000001 | –1.000000 | –1.004973 | 20000000 | 711 |  |
|  |  |
|  | 0.0001 | 2500 | 0.0000004 | –1.000000 | –1.004919 | 55555555 | 1971 |  |
|  | 0.01 | 0.005 | 50 | 0.000100 | –1.000000 | –1.004995 | 300000 | 10 |  |
|  | 0.001 | 250 | 0.000036 | –0.999996 | –1.003000 | 833333 | 43 |  |
| [–15; 15] |  |
| 0.001 | 0.0005 | 500 | 0.000001 | –1.000000 | –1.004933 | 30000000 | 1056 |  |
|  |  |
|  | 0.0001 | 2500 | 0.0000004 | –1.000000 | –1.004834 | 83333333 | 2871 |  |

Сравнивая с результатами, полученными в [5], мы видим, что при более простой реализации алгоритма требуется больше пробных точек, однако время, необходимое на выполнение алгоритма, значительно уменьшается.

**Глава 2. Случай функции двух переменных**

Далее рассмотрим случай применения метода равномерного перебора поиска глобального минимума двумерной ε-Липшицевой функции.

Дана функция такая, что . Область, на которой будет производиться изучение функции на минимум, разделим сеткой размера . Введём следующие обозначения:

* ε – параметр, выбираемый из условия (1)
* – погрешность, с которой отыскивается приближённое значение минимума функции
* – шаг алгоритма по оси ;
* – шаг алгоритма по оси ;
* - наименьшее значение функции на области (которое, очевидно, существует);
* - узел сетки, представляющий ячейку , где .

Определим значение . Для этого, сначала необходимо ограничить значение шага , допустим, следующим образом:

Тогда, очевидно

И, преобразовав это неравенство, получаем нижнюю границу шага по оси :

Аналогичным образом получаем оценку числа разбиений по оси :

Строго говоря, константы Липшица по оси и могут различаться, но мы можем взять большую из них и использовать как универсальную

Нашей задачей будет доказать истинность следующего неравенства:

Найдётся такой, что

(2.1)

(смотри рисунок 1)



Рисунок Геометрическое пояснение неравенства (2.1)

Или, что то же самое

В качестве нормы удобно будет выбрать покоординатную норму

Тогда:

Так как соседние узлы сетки не могут располагаться друг от друга дальше, чем на величину, то

А так как и , и ограничены сверху одной величиной , тогда можно записать

Переписав, получаем требуемое неравенство

Что и требовалось доказать.

Список литературы:

1. Vanderbei, R.J. Extension of Piyavskii’s Algorithm to Continuous Global Optimization / R.J. Vanderbei // Journal of Global Optimization. – 1999. – Vol. 14. – P. 205-216.
2. Заботин, В.И. Алгоритм вычисления минимальной оценки ε-постоянной Липшица непрерывной функции / В.И. Заботин, П.А. Чернышевский // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2018. - № 2, вып. 2. – С. 127-132.
3. Заботин, В.И. Два алгоритма отыскания проекции точки на невыпуклое множество в нормированном пространстве / В.И. Заботин, Н.К. Арутюнова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 3. – С. 344-349.
4. Арутюнова, Н.К. Алгоритмы проектирования точки на поверхность уровня непрерывной на компакте функции / Н.К. Арутюнова, А.М. Дуллиев, В.И. Заботин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 9. – С. 1448-1454.
5. Арутюнова, Н.К. Модификация метода Евтушенко поиска глобального минимума для случая непрерывной на компакте функции / Н.К. Арутюнова // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2013. - № 2, вып. 2. – С. 154-157.
6. N.K. Arutyunova Models and methods for three external ballistics inverse problems / N.K. Arutyunova, A.M. Dulliev, V.I. Zabotin // , Vestnik YuUrGU. – 2017. – Vol. 10. – P. 78-91.